

Rappels: $\diamond E \subseteq \mathbb{R}^n$ est ouvert si $\forall a = (a_1, \dots, a_n) \in E, \exists r > 0$ tq $B(a, r) \subseteq E$
 $\diamond E$ est fermé si $\mathbb{R}^n \setminus E$ est ouvert.

Frontière dans $E \leadsto$ ouvert / $\leq, \geq, = \leadsto$ fermé

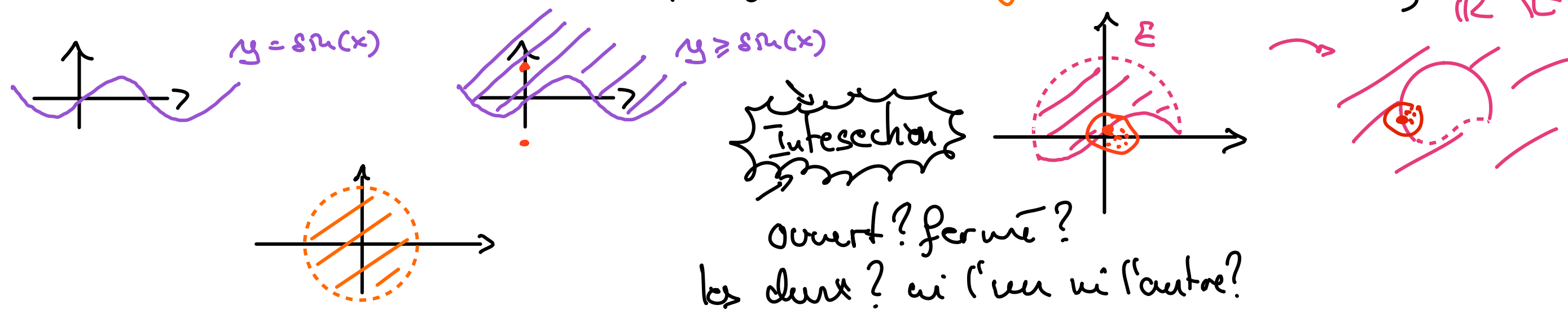
Frontière dans $E \leadsto$ fermé
Frontière pas dans $E \leadsto$ ouvert

⚠ mélanges d'indices ouvert & fermés
 $\rightarrow$ ni ouvert ni fermé

Important: dessiner des ensembles:

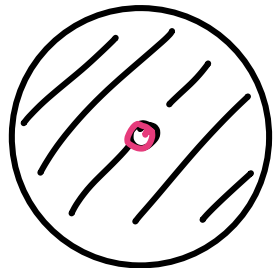
Que savons-nous dessiner? Pas grand chose: Les segments, les cercles/
 disques / sphères / boules & graphes de fonctions

Exemple: $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2, y \geq \sin(x)\}$ } $\mathbb{R}^2 \setminus E$



$$E = \overline{B}((0,0), 1) \setminus \{(0,0)\}$$

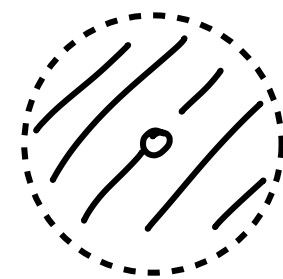
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$



ni l'un ni l'autre

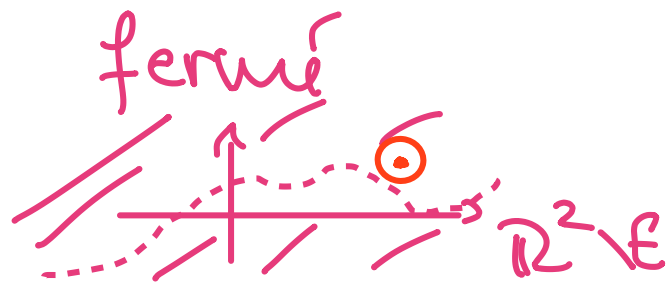
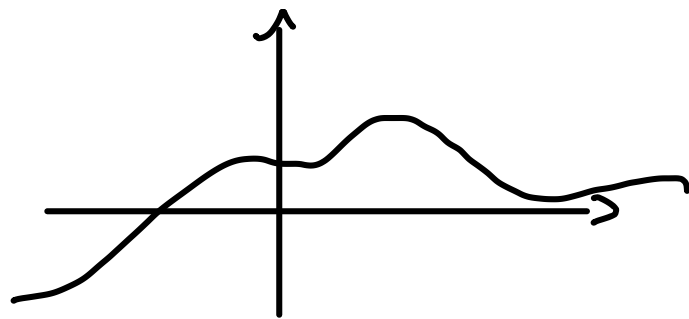
$$E = B((0,0), 1) \setminus \{(0,0)\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$$

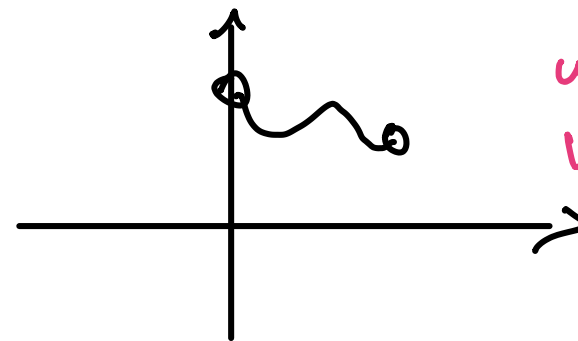


ouvert

$$f \in C^0(\mathbb{R}) \quad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$$



$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, y = f(x)\}$$



ni ouvert
ni fermé

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

ouvert. $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

Définition 2.11 (Intérieur, bord, adhérence)

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble

(i) L'intérieur de E qu'on note $\text{int } E$ ou E° est l'ensemble défini par $\text{int } E = \{x \in E : \exists r > 0 \text{ tq } B(x, r) \subseteq E\}$ = partie intérieure (sans la frontière)

(ii) Le bord de E qu'on note ∂E est l'ensemble défini par

$$\partial E = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0, B(x, r) \cap E \neq \emptyset \text{ et } B(x, r) \cap [\mathbb{R}^n \setminus E] \neq \emptyset\}$$

= tous les trucs qu'on regarde pour déterminer si un ensemble est ouvert ou fermé

(iii) L'adhérence de E notée $\text{adh } E$ ou $\overline{E}$ est l'ensemble

$$\overline{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0, B(x, r) \cap E \neq \emptyset\}$$

tout ce qu'on dessine.

(iv) par convention $\text{int } \emptyset = \partial \emptyset = \overline{\emptyset} = \emptyset$

$$\text{et } \underline{\text{int } \mathbb{R}^n = \overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n} \quad \& \quad \partial \mathbb{R}^n = \emptyset$$

$$\partial [a, b] = \{a, b\}$$

Proposition 2.12

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble. Alors,

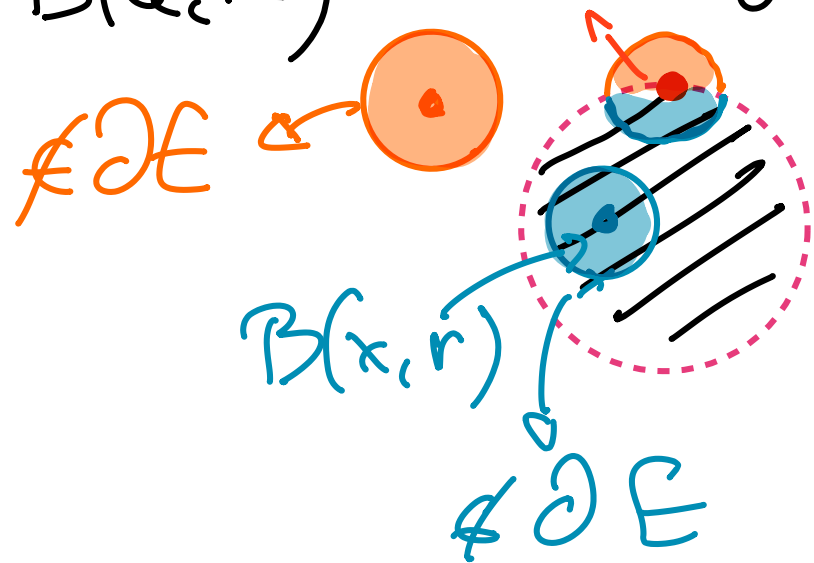
- (i) $\text{int } E$ est un ouvert, $\bar{E}$ et ∂E sont fermés.
- (ii) $(\text{int } E) \cap \partial E = \emptyset$
- (iii) $\text{int } E \subseteq E \subseteq \bar{E}$
- (iv) $\text{int } E = E \setminus \partial E = \bar{E} \setminus \partial E$
- (v) $\partial E = \bar{E} \setminus \text{int } E$
- (vi) $\bar{E} = E \cup \partial E = (\text{int } E) \cup \partial E$
- (vii) E est ouvert $\iff E = \text{int } E$
- (viii) E est fermé $\iff E = \bar{E}$

Example 2.13 (i) Les boules.

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$.

int $B(a, R)$? $\partial B(a, R)$? $\overline{B(a, R)}$

↳ 2.12 (vii)
 $B(a, R)$ $\in \partial E$ $\partial B(a, R)$?



$x \in \partial B(a, R) \Leftrightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap B(a, R) \neq \emptyset$

& $B(x, r) \cap \mathbb{R}^n \setminus B(a, R) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \underline{\partial B(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(a, x) = R\}}$

$\overline{B(a, R)} = B(a, R) \cup \partial B(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(a, x) \leq R\} = \overline{B(a, R)}$

$$\text{int } \overline{B}(a, R) = B(a, R), \quad \partial \overline{B}(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) = R\}$$

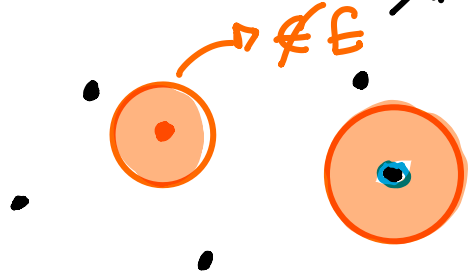
$$\overline{\overline{B}(a, R)} = \overline{B}(a, R)$$

(ii) Les ensembles fermés.

$$\text{Soit } E = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

un ensemble fini,

$$a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$$



$$\partial E = ?$$

$$\partial E = E$$

$$\Rightarrow \bar{E} = E \cup \partial E = E$$

$$\text{int } E = \bar{E} \setminus \partial E = E \setminus E = \emptyset$$

Remarque 2.14

(iii) Soient si l'ensemble est de la forme

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} f_1(x) < a_1, \dots, f_k(x) < a_k \\ g_1(x) \leq b_1, \dots, g_e(x) \leq b_e \end{array} \right\} \quad \text{Alors, le bord a } k+1 \text{ parties:}$$

$$\partial E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} \textcolor{red}{f_1(x) = a_1}, \textcolor{orange}{f_2(x) < a_2}, \dots, \textcolor{orange}{f_k(x) < a_k}, \\ g_1(x) \leq b_1, \dots, g_e(x) \leq b_e \end{array} \right\}$$

$$\cup \dots \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} f_1(x) \leq a_1, \dots, f_{k-1}(x) \leq a_{k-1}, \textcolor{red}{f_k(x) = a_k} \\ g_1(x) \leq b_1, \dots, g_e(x) \leq b_e \end{array} \right\}$$

$$\cup \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} f_1(x) \leq a_1, \dots, f_k(x) \leq a_k \\ \textcolor{red}{g_1(x) = b_1}, g_2(x) \leq b_2, \dots, g_e(x) \leq b_e \end{array} \right\}$$

$$\cup \dots \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} f_1(x) \leq a_1, \dots, f_k(x) \leq a_k \\ g_1(x) \leq b_1, \dots, g_{e-1}(x) \leq b_{e-1}, \textcolor{red}{g_e(x) = b_e} \end{array} \right\}$$

pour l'intérieur, on remplace $\leq$ et $\geq$ par $<$ et $>$
pour l'adhérence, on remplace $<$ et $>$ par $\leq$ et $\geq$

Définition 2.15 Ensemble borné

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble non-vide. On dit que E est borné si $\exists M > 0$ tq $\forall x \in E, \|x\| \leq M$.

Remarque 2.16 (i) E est borné si et seulement si $\exists M > 0$
tq $E \subseteq \overline{B}(0, M)$

(ii) Sur un dessin, un ensemble est borné si on peut dézoomer le voir en entier

À propos série 4, $y = f(x)$, $x = f(y)$

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b$$